Σχετικά με Ακρότατα:

Δείτε: Παράδειγμα 3.9.2

(+) Παρατήρηση 3.9.3

και Παράδειγμα 3.1.3

→ (A) Αν είναι Εσσιανός πίνακας έχει μηδενικές ιδιοτιμές

⇒ το ικανό κριτήριο θα δουλεύει

(B) Όταν λέμε ότι ενας Εσσιανός είναι μη ορισμένος (ή μη ορισμένος)

⟺ έχει μόνο θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές

Στην περίπτωση (A) αν έχουμε ένα κρίσιμο σημείο

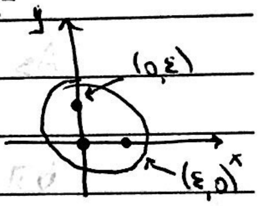
$\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$ και δεν «λειτουργεί» το ικανό κριτήριο πρέπει να δοκιμάσουμε να δούμε τι γίνεται σε τιμές

$\bar{x} \in B(\bar{x}_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ [δηλαδή για $\bar{x}$ κοντά στο $\bar{x}_0$]

[πχ για $f(x,y) = x^2 - y^2$ έχουμε $f(0,0) = 0$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$ βλέπουμε ότι $f(\varepsilon,0) = \varepsilon^2$, $f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^2$

⇒ στο (0,0) δεν έχουμε ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο)



Τρία σημαντικά «ποιοτικά»(*) αποτελέσματα, τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους, και είναι πολύ χρήσιμα πχ στη διαφορική γεωμετρία

(*) Συνεπώς ότι περιγράφουν το είδος πχ μιας συνάρτησης την συμπεριφορά και τις ιδιοτιμές της, χωρίς να δίνεται η συνάρτηση ρητά («ποιοτικά» / «ποσοτικά»)

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης:

[Ουσιαστικά: Θεώρημα «έμμεσης» συνάρτησης δηλαδή «έμμεσα» δοσμένης]

πχ η $g(x)$ δίνεται «πεπλεγμένα» ως $f(x, g(x)) = 0$ [και όχι ρητά (expliciting) ... $g(x) = \ldots$ (συνάρτηση του x)]

Έστω $U \subset \mathbb{R}^{n}$, $V \subset \mathbb{R}^{m}$, ανοιχτοί, $\bar{F} = (F_1, \dots, F_n) \underbrace{U \times V}$ $\to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη $(\bar{F} \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)) \subset \mathbb{R}^{m \times m}$

και $\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_m}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_m}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^{m \times m}$ να είναι αντιστρέψιμος όπου $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in U \times V$ με $\bar{F}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \bar{0}$.

$\Rightarrow \exists\, \delta, \varepsilon > 0 \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$

$\exists!\ \bar{g}(\bar{x}) \in \bar{B}(\bar{y}_0, \varepsilon) \subset V. \quad F(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) = \bar{0}.$

και $\bar{g}: B(\bar{x}_0, \delta) \to B(\bar{y}_0, \varepsilon)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη

και $\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ αντιστρέψιμος $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$

και $\underbrace{D\bar{g}(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} = -\left(\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))\right)^{-1} \dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})), \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$

Ας δούμε τι λέει το Θ.Π.Σ για $\boxed{n = m = 1}$

Θ.Π.Σ. (για $n = m = 1$) Έστω $F: \underset{U}{(a,b)} \times \underset{V}{(c,d)} \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη

και $(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$ με $F(x_0, y_0) = 0$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, \delta, \varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ $\exists!$
$g(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset (c,d):\ F(x, g(x)) = 0$ και $g: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ συνεχώς διαφορίσιμη

με $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \neq 0$ και $g'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

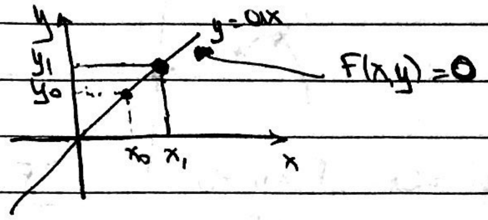
Ερμηνεία του $\underbrace{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\text{η παράγωγος της } F(x,y) \text{ στο } y = y_0} \neq 0$, δηλ. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{\underbrace{h}_{= y_1 - y_0}} \neq 0.$

δηλ. για $y_1 \neq y_0 \Rightarrow F(x_0, y_0) \neq \underbrace{\pm(x_0, y_0)}_{\substack{=0 \\ = F(x_1, y_1)}}$

$\Rightarrow x_1 \neq x_0$

Παράδειγμα: Έστω $F(x,y) = y - \underset{\neq 0}{a}x = 0$

Ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x, ax) = 0$.

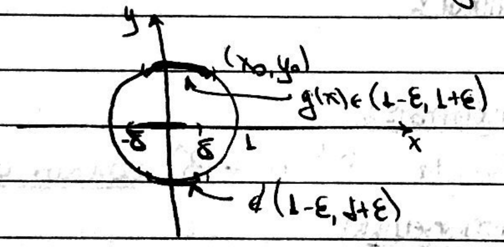


$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Παράδειγμα: Έστω $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Θέλουμε να επιλύσουμε την $F(x,y) = 0$ ως προς y, δηλ. να βρούμε μια συνάρτηση $x \longmapsto g(x) = y$ για την οποία $F(x, g(x)) = 0$ για όσο πιο πολλά x γίνεται. Ας εφαρμόσουμε Θ.Π.Σ. Για $(x_0, y_0) = (0,1)$ έχουμε $F(x_0, y_0) = 0$. Επίσης $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y \neq 0,\ \forall y \neq 0$ $\xRightarrow{\text{ΘΠΣ}}$ $\exists\, \delta, \varepsilon > 0$ $\forall x \in (-\delta, \delta)$ $\exists!$ $g(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ με $F(x, g(x)) = 0$ και $g \in C^1(-\delta, \delta)$ και $g'(x) = \frac{-2x}{2g(x)} = -\frac{x}{g(x)}$

Πράγματι,

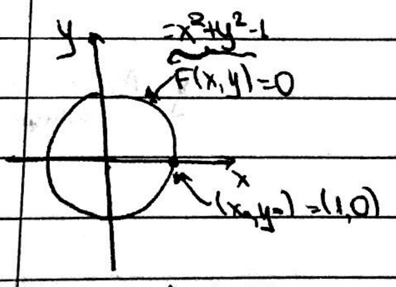


$\Rightarrow g(x) = \sqrt{1-x^2}$ $[g(x_0) = y_0 = 1]$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{g(x)}$$

Για $y = 0$ έχουμε: $F(x,0) = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1$ αλλά και $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y = 0$! (ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται).

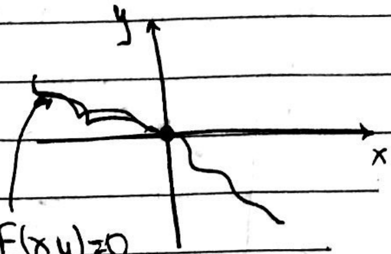
π.χ. για $(x_0, y_0) = (1,0)$ έχουμε $F(x_0, y_0) = 0$ αλλά $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ και το ΘΠΣ δεν «δουλεύει» αφού $\forall \delta \in (0,1)$ $\forall x \in (1-\delta, 1]$ $\exists\, 2$ λύσεις $g_1(x) \neq g_2(x)$ με $F(x, g_1(x)) = 0 = F(x, g_2(x))$



$g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$

$g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι για $x\in\mathbb{R}$ αρκετά κοντά στο 0 (δηλ. με $|x|<\delta$ για κάποιο $\delta>0$) υπάρχουν μοναδικές λύσεις $y(x)$ κοντά στο 0 της εξίσωσης $F(x,y)=e^{\sin(xy)}+x^2-2y-1=0$ και υπολογίστε το $y'(x)$ ως συνάρτηση των x και $y(x)$.



<u>Λύση</u>

$F(0,y)=0 \Rightarrow y=0$

Άρα $(x_0,y_0)=(0,0) \Rightarrow F(x_0,y_0)=0$ $\quad F(x,y)=0$

$F\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ [ως σύνθεση και πολυώνυμο C^∞ συναρτήσεων] $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2+e^{\sin(xy)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=-2\neq 0$

$\overset{\text{ΘΠΣ}}{\Rightarrow} \exists\, \delta,\varepsilon>0,\ \forall x\in(-\delta,\delta)\ \exists!\ y(x)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\ F(x,y(x))=0$

και $x \longmapsto y(x)$, $x\in(-1,1)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη

και $y'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y'(x))} = \dots \Rightarrow y'(0)=\dots$

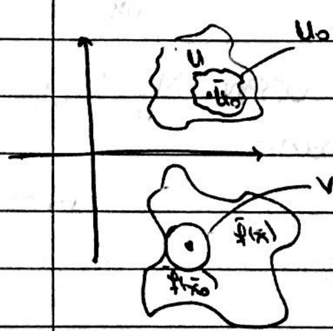
Το ΘΠΣ δουλεύει τοπικά!

<u>Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης:</u>

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό $\bar{x}_0\in U$ $\bar{f}: U\to\mathbb{R}^n$ <u>συνεχώς διαφορίσιμη</u> με $D\bar{f}(\bar{x}_0)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ <u>αντιστρέψιμο</u>.

$\Rightarrow$ $\exists\, U_0$ ανοικτό με $\bar{x}_0\in U_0\subset U$ και $V=B(\bar{f}(\bar{x}_0),\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ έτσι ώστε η $\bar{f}|_{U_0}: U_0\to V$ να είναι 1-1 και επί

$U_0=(\bar{f}|_{U_0})^{-1}(V)$ [δηλ. αν περιορίσουμε την $\bar{f}$ κατάλληλα [τότε αυτή είναι αντιστρέψιμη] γύρω από το $\bar{x}_0$ [$D\bar{f}(\bar{x}_0)$ αντιστρέψιμος!]]



$\bar{y}=A\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}=\underset{\text{Αντιστρ.}}{A^{-1}}\bar{y}$

και η αντίστροφη $\bar{g} : (\bar{f}|_{U_0})^{-1} : V \to U_0$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη
και $D\bar{g}(\bar{y}) = D\bar{f}(\bar{g}(\bar{y}))^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\forall \bar{y} \in V$ (με $\nabla \bar{f}(\bar{g}(\bar{y}))$ αντιστρέψιμο
$\forall \bar{y} \in V$)

Σύνοψη: $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$: C^1 ($U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό), $\det(D\bar{f}(\bar{x}_0)) \neq 0$ για
$\bar{x}_0 \in U$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{κοντά στο } \bar{x}_0}_{=U_0}$ η $\bar{f}$ είναι 1-1 και επί $\underbrace{\text{κοντά στο } \bar{f}(\bar{x}_0)}_{=V}$

και η $\bar{f}^{-1}$ $V \to U_0$ είναι C^1 με $D(\bar{f}^{-1})(\bar{f}(\bar{x})) = (D\bar{f}(\bar{x}))^{-1}$

$I_{\bar{x}} = \bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{x}))$

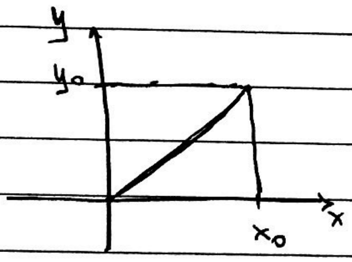
$\Rightarrow \underbrace{DI(\bar{x})}_{=I} \underset{\text{κλ}}{=} (D\bar{f}^{-1})(\bar{f}(\bar{x}))D\bar{f}(\bar{x})$

$\mathbb{R}^n \ni x \xmapsto{f} \underbrace{A\bar{x}}_{=\bar{y} \in \mathbb{R}^n}$ με $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$\Rightarrow \bar{f}(\bar{x}) = A\bar{x}$

$\Rightarrow D\bar{f}(\bar{x}) = A$ $\quad$ I = μοναδιαίος πίνακας στον $\mathbb{R}^n$

Παράδειγμα: (3.4.1)



$\bar{f}(x_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\bar{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Έχει (Άσκηση: εφαρμογή Θ.Α.Σ. (τοπικά!))